第 12 講　図形の計量

PART1　角の二等分線の長さ，三角形の内接円と面積

例題

(1)　△ABC において，AB＝4，AC＝6，$A=60^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　△ABC において，AB＝5，AC＝4，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a=3$，$b=5$，$C=120^\circ$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

第12講　PART1　確認問題

1 △ABC において，AB＝4，AC＝8，$A=60^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$$\mathrm{AD}=\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

2 △ABC において，$a=9$，$b=6$，$c=5$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

$$r=\sqrt{\boxed{エ}}$$

第 12 講　図形の計量

PART1　角の二等分線の長さ，三角形の内接円と面積

例題

(1)　△ABC において，AB＝4，AC＝6，$A=60^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

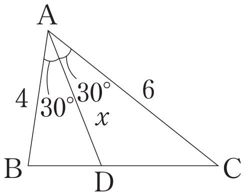
(2)　△ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

(1)　AD＝x とおく。

△ABC＝△ABD＋△ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot \sin 30^\circ$$

$6\sqrt{3}=x+\frac{3}{2}x$　　$x=\frac{12\sqrt{3}}{5}$　　よって AD＝$\frac{12\sqrt{3}}{5}$



(2)　余弦定理より

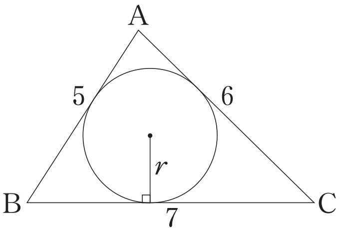
$$\cos A=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{12}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{5}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

△ABC の面積を S とすると $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より $6\sqrt{6}=\frac{1}{2}r(7+6+5)$

$6\sqrt{6}=9r$　　$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

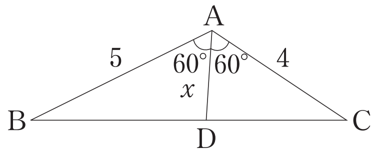


練習

(1)　△ABC において，AB＝5，AC＝4，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a=3$，$b=5$，$C=120^\circ$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

(1)　AD$=x$ とおく。

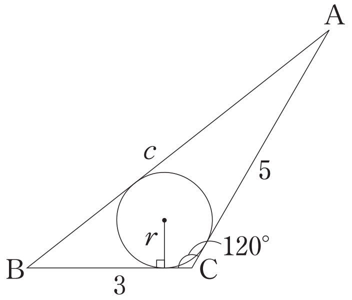


$\triangle$ABC$=\triangle$ABD$+\triangle$ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 60^\circ$$

$$5\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}x+\sqrt{3}\,x \qquad x=\frac{20}{9} \qquad \text{よって AD}=\frac{20}{9}$$

(2)　余弦定理より



$$c^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120^\circ=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

$c>0$ より $c=7$

$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ より $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}r(3+5+7)$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{15}{2}r \qquad r=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

第12講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：8，イ：3，ウ：3

[解説]

AD＝x とおく。

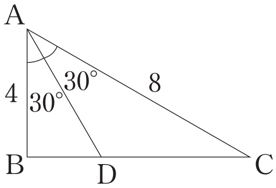
△ABC＝△ABD＋△ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot \sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot \sin 30^\circ$$ [A]

$$8\sqrt{3}=x+2x$$

$$x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$



よって

$$\mathrm{AD}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

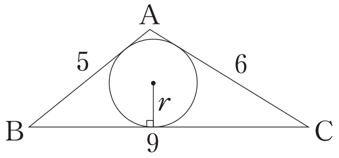
[A]　角の二等分線の長さ
△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき
三角形の面積，
△ABC＝△ABD＋△ACD であることを利用し，求めることができる。

2 [正解] エ：2

[解説]

余弦定理より

$$\cos A = \frac{6^2+5^2-9^2}{2\cdot6\cdot5} = \frac{-20}{2\cdot6\cdot5} = -\frac{1}{3}$$



$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

△ABC の面積を S とすると

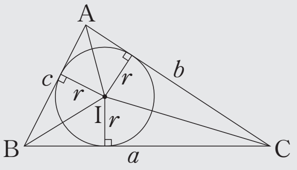
$$S = \frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より [B]

$$10\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(9+6+5)$$

$$10\sqrt{2} = 10r$$

$$r = \sqrt{\mathbf{2}}$$

[B]　三角形の内接円と面積
△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$